第３学年数学科学習指導案（11/14ver.）

山梨大学教育学部附属中学校
指導者　　小松　琢朗
共同研究者　　清水　宏幸

１．単元名　第５章【相似な図形】形に着目して図形の性質を調べよう

２．単元について

（１）生徒観

小学校５年生までに，三角形や四角形，正多角形，円などの基本的な図形を扱い，これらの図形を構成する要素や，図形の性質，作図の仕方などを学習してきている。また，２量の関係については，小学校２年生以来「倍」や「割合」の学習を拡張し深めてきている。さらに小学校６年生で「比」，中学校１年生で「比例式」も学習している。

その中で生徒たちは，小学校６年生において拡大図，縮図の意味とそのかき方，縮図の利用を，さらに比や比の値の意味とその表し方を学んできた。この「拡大図と縮図」という単元において，拡大図や縮図の観察やかくことを通して拡大図，縮図の意味や性質について理解し，図形を構成する要素および図形間の関係に着目し，構成の仕方を考察したり図形の性質を見いだしたりする力を養ってきている。具体的な学習状況としては，まず「形が同じで大きさが違う図形」を直観的にとらえ，それらの形同士にはどのような関係があるのかを辺の長さや角の大きさに着目して調べ，拡大図，縮図の意味の理解へとつなげた。そこから，拡大図や縮図の作図は，まず既習の合同な図形の３つのかき方をもとに考えている。さらに図形を構成する要素および図形間の関係に着目し，一つの点を中心とした拡大図，縮図の書き方も考える。また，同時に既習の基本図形を拡大図，縮図という観点からとらえ直すという学習もしている。そのうえで拡大図，縮図の学習を活用して，縮尺についても理解し，縮図から実際の長さを求めることも学んできた。日常生活の中にも縮図が用いられている場合があることに気づき，自らの生活にこの「拡大図と縮図」の学習内容が生かされていることを経験してきている。

また，中学校では２年生の学習で，三角形の合同条件を用いて，三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめることを学習してきた。「平行と合同」の単元では，小学校の「直線の垂直や平行」「図形の合同」「対称な図形」などの基本概念について，直観，具体的操作，類推や帰納的な考え方などに比較的重点がおかれてきた学習を，根拠となる事柄をもとに筋道を立てて説明するという，より演繹的な考え方に重点をおいた学習を重ねてきた。また中学校１年生で学習した「平行移動，対称移動および回転移動」「基本的な作図とその活用」で扱った図形の合同を，根拠をもとに証明し，筋道立てて説明する力をつけ，さらに次章の「三角形と四角形」での学習の基礎としている。そのうえで「三角形と四角形」の単元では，演繹的な推論の意味や方法を明らかにしながら，三角形や四角形の性質を調べていった。また，定義や定理，および定理の逆の意味や仮定，結論を明らかにして証明することの意味などを理解し，証明を書くことにも少しずつ慣れていくように学習を進めてきた。

最後に図形領域における学習内容の定着状況を述べる。本年度の４月に行った全国学力・学習状況調査の結果をみると，ほかの領域に比べて図形領域の定着状況に課題があることが明らかとなった。具体的には生徒の誤答傾向から①文章から図（図形）をイメージすること，②証

明の前提となる事柄，前提としてよい事柄を正しく把握すること，③条件変えによって証明がどのように変化するのかをとらえること，に課題があることが明らかとなった。

（２）教材観

この「相似な図形」の単元では三角形の相似条件を用いて，三角形や平行線と比に関する図形の性質を中心に論理的に確かめ，数学的な推論の仕方についてその理解を深めることがねらいである。

また，中学校学習指導要領（2017）の３年 B 図形（１）イ（ウ）に「相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること」（P74）と明記されている。実生活の中で数学が活用されているよさを理解させ，数学を活用する態度を養う場面として，相似の考えの活用を位置付けることが大切である。地図や写真の効用や設計図の重要性をはじめとして，大きいものを小さくしたり，小さいものを大きくしたりして扱うことが有効な場面を，身のまわりからいろいろと見いだすことができる。このように，日常生活で相似を利用している場面を生徒が見いだし，利用の仕方を考察することも大切である。

本章の最後に，相似な図形の計量に関する学習をすることにより，相似な図形の理解をさらに深める。相似な図形の相似比と面積比，体積比の関係を理解させ，具体的な場面でそれを活用できるようにさせることがねらいである。相似比は対応する線分の比であり，面積比はその２乗，体積比はその３乗になることを理解させる。この理解には図形全体としての面積比や体積比だけではなく，相似な図形の対応する各部分の比を考えさせる必要がある。例えば，相似な図形の周の長さの比は各辺の長さの比を，表面積の比は立体の各面の面積比を考えさせる必要がある。このように面積比や体積比の学習では，相似な図形の対応するいろいろな部分の比について考えさせることになる。これまでは，ともすると三角形の相似条件に代表されるように，相似比を多角形の対応する辺の比としかとらえてこなかったきらいがある。相似な図形の対応するいろいろな部分の比を考えさせることにより，相似な図形についての理解を深めることが面積比や体積比の指導のねらいである。

（３）指導観

本単元では，論証指導や現実事象への相似な図形の活用はもちろんのこと，作図ツール等を活用して自らの手で図形を操作し，作業することを通しながらその図形のもつ本質的な性質を発見していくために必要な資質・能力も育ませたい。図形を動的にとらえることのよさとしては，図形が操作によって形を変えていく中から，「変わらないもの」＝「その図形の本質的な性質」を見いだすことが可能になることである。これは事象から命題を見いだす活動や考察，すなわち「発見的考察」に他ならない。早川(1997)では「発見的考察」には「気づく段階」と「検討する段階」の２つがあるとしている。生徒は図形を観察したり，動かしたりしながら「なにかきまりはあるのだろうか」と試行錯誤する。この「なにかきまりはあるのかな」と模索している意識について，早川（1997）は『辺や角などの構成要素や辺と辺の関係，角と角の関係などに注目していくと，図形のきまりが暗示される。図形のきまりに「気づく段階」である。』と述べている。１人１台端末があるからこそ，生徒自身が自らの手で図形を動的にとらえることで，図形の中にあって変わらない本質的な性質を発見していく活動が期待できると考

える。さらに「図形を動的にとらえる」という活動では，生徒たちは自らの手で図形を操作してみることで，同一の条件を満たす数多くのその図形のバリエーションを目にすることになる。この「図形を動的にとらえる」操作は図形そのものの形を変えない操作である「平行移動」「対称移動」「回転移動」とは異なる。ここでいう「図形を動的にとらえる」とは、その図を一般的な図として示すために図形を動かすことである。生徒たちはその操作の中で図形の特殊な場合も一般的な場合も数多く目にすることで，その図形に対するイメージを豊かにしていくだろう。これは，本校生徒の「①文章から図（図形）をイメージすることに課題がある」という課題の克服にも良い影響を与えるのではないだろうか。

次に，自分たちで見いだし、予想した命題について「本当にそうだろうか？」と確かめる活動や考察に生徒の思考は移っていく。早川（1997）は『図形のきまりに気づくと，「そのきまりは本当なのか」とその真実性を確かめようとする。また，「きまりはいつでも言えるのか」ときまりの一般性を探ろうとする。気づいた図形のきまりを「検討する段階」である。』と述べている。このように、「検討する段階」においても作図ツール等を活用した図形を動的にとらえる操作は有効である。本単元では図形を動かすだけでなく，その図形を構成する条件を変えながら発見したきまりの本質に迫っていくことになる。それにともなって一度行った考察をふり返り，条件が変化にともなって，図形を構成する要素の中で変化するところと変化しないところがあることに気が付いていくだろう。この「変化しないところ」こそが本単元の学習の最後に迫るその図形の本質である。そして最後に「確証的考察」によって演繹的にその図形の性質を証明していくことになる。「確証的考察」について早川(2001)は「見つけたきまりや法則を証明にすることによって数学的な確証を得る活動」と述べている。ここで大切なのが発見的考察を通して「本当にそうなるのか」という生徒の「証明してみたい」という欲求（必要感）を育んでおくことである。与えられた命題ではなく、生徒自らが図形を操作し、考察し、見つけ出した図形の性質だからこそ生徒たちは「証明してみたい」と考えるであろう。小学校ではいわゆる「根拠となることがら」が少ないので演繹的な証明まで進むことはできないが、中学校のこの段階では証明することが可能であるため「確証的考察」にも取り組ませたい。このような学習は，本校生徒の課題でもある「③条件変えによって証明がどのように変化するのかをとらえることに課題がある」ということの改善につながっていくと考える。

また，図形の本質を見いだすためには，これまでに学んだ図形の性質の活用が欠かせない。生徒たちは学習過程の中で，この図形にはどのような性質が仮定としてあり，見いだした性質はどのように証明することが可能なのかを考えていくことになる。そして試行錯誤しながら徐々に条件を整理し，証明として成り立たせていくことになるのである。これは本校生徒の「②証明の前提となる事柄，前提としてよい事柄を正しく把握することに課題がある」という課題の克服にも効果があると期待している。

最後に，この単元の学習は円，三平方の定理といった図形領域の学習につながっていくのみならず，これまで学習してきた二次方程式や関数 $y=ax^2$ といった数と式領域や関数領域にもよい影響を与えると考えている。図形を動的にとらえながら条件を付けくわえたり減らしたりしていった経験や問題解決後にその過程をふり返り，新たな性質を発見していった経験は，数学における他領域の問題場面における本質的な条件の探究に役立つであろう。

３．単元の目標

| 知識・技能 | 思考・判断・表現 | 主体的に学習に取り組む態度 |
|---|---|---|
| ①平面図形の相似の意味および三角形の相似条件について理解している。<br>②基本的な立体の相似の意味及び相似な図形の相似比と面積比や体積比との関係について理解している。 | ①三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質を論理的に確かめることができる。<br>②平行線と線分の比についての性質を見いだし，それらを確かめることができる。<br>③相似な図形の性質を具体的な場面で活用することができる。 | ①相似な図形の性質のよさを実感して粘り強く考え，図形の相似について学んだことを生活や学習に生かそうとしたり，相似な図形の性質を活用した問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとしたりしている。 |

４．指導と評価の計画（全２５時間）

本単元を内容のまとまりである５つの小単元と単元のまとめで構成し，それぞれの授業時間数を次のように定めた。

| 小単元等 | 授業時間数 | |
|---|---|---|
| １．相似な図形 | ８時間 | ２５時間 |
| ２．平行線と比 | ８時間 | |
| ３．課題学習 | ３時間（本時１時間目） | |
| ４．相似な図形の面積と体積 | ４時間 | |
| ５．単元のまとめ | ２時間 | |

各授業時間の指導のねらい・生徒の学習活動及び重点，評価方法等は次の表のとおりである。本時の授業に関わりのある小単元３について示す。

【小単元３】　※黒枠が本提案の授業

| 時間 | ねらい・学習活動 | 重点 | 記録 | 備考 |
|---|---|---|---|---|
| １ | 図を動かしたり補助線をひいたりする活動を通して、<br>・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を発見・考察することができるようにする。<br>・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く探究する態度を養う。 | 思<br>態 | ○<br>○ | 思③：学習シート<br>行動観察<br>態①：行動観察<br>学習感想 |
| ２ | 前時に見いだした性質を証明したり、課題を発展させたりする活動を通して、<br>・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を証明することができるようにする。<br>・三角形の外角の二等分線と辺の比の性質について発見することができるようにする。<br>・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く探究することができる態度を養う。<br>・問題解決の過程を振り返り、内角の二等分線の場合をもとにして外角の二等分線の場合について考察しようとする態度を養う。 | 思<br>思<br>態<br>態 | ○<br><br>○<br>○ | 思③：学習シート<br>行動観察<br>思③：学習シート<br>行動観察<br>態①：行動観察<br>学習感想<br>態①：行動観察<br>学習感想 |
| ３ | 前時に見いだした性質を証明したり、内角と外角の二等分線と辺の比の性質を統合させたりする活動を通して、<br>・三角形の外角の二等分線と辺の比の性質を考察することがで | 思 | ○ | 思③：学習シート |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | きるようにする。 | | | 行動観察 |
| | ・三角形の内角と外角の二等分線と辺の比の性質や、その性質を求める過程の共通点に着目し、統合的な見方をすることができるようにする。 | 思 | ○ | 思③：学習シート<br>行動観察<br>学習感想 |
| | ・三角形の外角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く探究しようとする態度を養う。 | 態 | ○ | 態①：行動観察<br>学習感想 |
| | ・問題解決の過程を振り返り、問題解決の方法について評価・改善しようとする態度を養う。 | 態 | ○ | 態①：行動観察<br>学習感想 |

５．研究との関わり

①全体研究との関わり

全体研究では「創造性」を「自ら課題を見いだし，これまでに学んだことや新たな知，技術革新を結びつけることで解決して，新たな価値を創り出すための資質・能力（思考力・判断力・表現力等)」と定義づけている。それをうけて，教科総論にもある通り数学科では創造性を「数学的な考え方」を育むことであると定義した。本小単元では作図ツールを用いて図形を動的に観察しながら，角の二等分線と辺の比の性質について考察していく。生徒たちは先にも述べた「発見的考察」と「確証的考察」を繰り返す中で「等しい２つの角に着目し、二等辺三角形の性質を利用すること」「相似な三角形に着目することで対応する線分の長さの比がとれること」「図形の性質の考察に有効な補助線の種類」「内角と外角それぞれの二等分線と辺の比の性質の共通性」を発見していくことになるであろう。この過程そのものがプロセスモデルのサイクル「遂行→ふり返り→方略調整→遂行･･･」を回していくことと同義であると考えられる。このように試行錯誤することを通して，生徒たちが図形領域に対する概念（価値）を創り出していくことを期待している。

②本校数学科で目指す「考えさせる授業」との関連

本小単元では，本校数学科として特に育みたい「創造性」のうち，「②数学の事象における問題を数学的にとらえることについて，数学の事象から問題を見いだす力や，事象の特徴を捉え，数学化する力，得られた結果を基に拡張・一般化する力」と「④解決過程を振り返るなどして概念を形成したり，体系化したりすることについて，数学的な見方・考え方のよさを見いだす力や，得られた結果を基に批判的に検討し，体系的に組み立てていく力，見いだした事柄を既習の知識と結び付け，概念を広げたり深めたりする力，統合的・発展的に考える力」を育むことを目指している。②を育むための過程の方略として「事象の特徴を的確に捉える」ことや「理想化したり単純化したりする」こと，④を育むための過程の方略として「解決の過程や結果を振り返り評価・改善する」ことや「統合的・発展的に考察する」ことを生徒たちは用いると考える。これらの創造性を育んだり，方略を身に着けたりするためには生徒自らが「考える」ことが不可欠である。作図ツールを用いて図形を動的に観察し，「角の二等分線と辺の比の性質」を「発見的考察」と「確証的考察」を繰り返しながら見いだしていく活動は，本校数学科が重視する「作業」といえるものである。この「作業」を通じて，「考えさせる授業」づくりを行い，生徒の創造性を育んでいく。

６．本提案の授業

（１）日　時：令和５年１１月２３日（木）第２校時　９：５０～１０：４０

（２）場　所：山梨大学教育学部附属中学校　第１コンピューター室

（３）題材名：「角の二等分線と辺の比の性質を発見しよう」

（４）本時のねらい

図を動かしたり補助線をひいたりする活動を通して、

- 三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を発見・考察することができるようにする。【思考・判断・表現】
- 三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く探究する態度を養う。【主体的に学習に取り組む態度】

（５）評価のための工夫

【思考・判断・表現】について

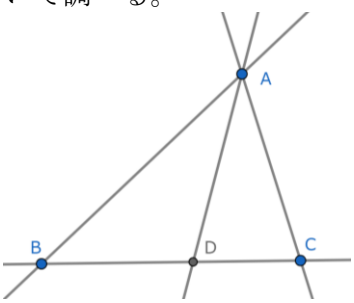
- 授業では，自力解決やグループ学習の様子，全体での発表の内容から見とる。
- 自力解決やグループ学習の様子，全体での発表の中で見とれなかった生徒は，授業後に学習シートの記述の内容で見とる。

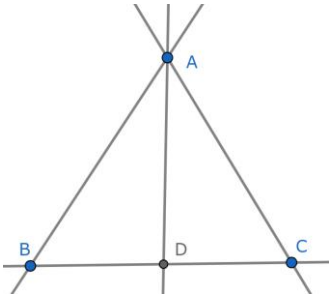
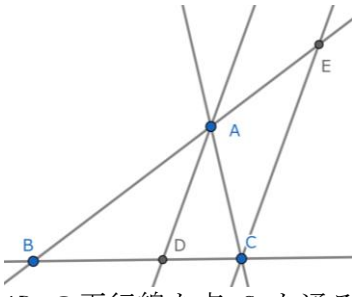
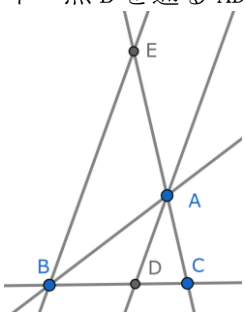
【主体的に学習に取り組む態度】について

- 授業では，粘り強く課題に取り組んでいるか，自分にとって適切な学習形態を選択しているか，生徒の行動を観察する。なお、「粘り強く課題に取り組む」姿の一例として「補助線のひき方を数種類検討する」「より証明が簡潔になる（一般性のある）補助線のひき方について検討する」といったことが考えらえる。
- 本時の学習内容について自らの学びを評価・改善しているかについては，授業後に学習感想の中で見とる。

（６）展開

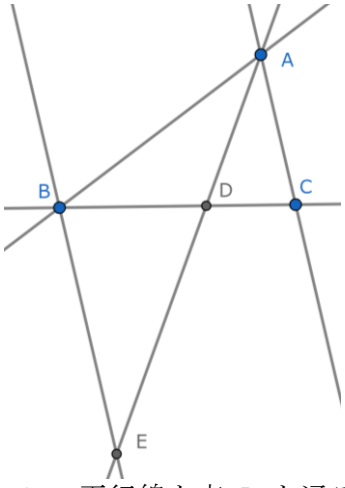
展開（１／３時）　※公開授業

| 過程 | 指導内容及び学習活動 | ・予想される生徒の反応 | ○指導上の留意点<br>☆評価 |
|---|---|---|---|
| 導入<br>(25) | ●課題を把握する。<br>直線 AB，BC，CA をひき、∠A の二等分線と直線 BC の交点を D とするとき、この図形にはどんな図形の性質があるか調べてみよう。<br>・作図した図形の性質について調べる。<br>  <br><br>・特殊な場合を考える。 | ・線分の長さや角の大きさを測定して調べてみよう。<br>・△ABC を正三角形にして考えてみよう。<br>・△ABC を AB=AC の二等辺三角形にして考えてみよう。<br>・正三角形や二等辺三角形のときは直線 AD は辺 BC の垂直二等分線にもなっている。<br>・△ABD と△ACD の面積が等しい。<br>・AB:AC と BD:DC が等しい。 | ・Geogebra で生徒と一緒に作図する。<br>・学習シートをロイロノートで配布する。<br>・生徒が発見した性質を全体で共有する際、その図だけでなく図を動かした場合でも成り立つことを実際に図を動かして見せることで確認す |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ・△ＡＢＣに着目し、一般形と特殊形を比較して考える。<br>  <br><br>・発見したこの図形の性質を「予想」として学習シートへまとめる。<br>この図形において AB:AC＝BD:DC となることを証明しよう。 | ・正三角形や二等辺三角形でないときは直線 AD は垂直ではないし、底辺を二等分もしていないね。<br>・△ABD と△ACD の面積の比が BD:DC と等しくなる。<br>・AB:AC と BD:DC が等しい。 | る。<br>・「二等分する」ということは底辺を１：１にわけているということに気づかせる。<br>・比の発想が生まれない場合は「二等辺三角形の場合は１：１だったが、この図形では点 D は底辺をどう分けているのか」と問うてみる。<br>・BD:DC が AB:AC と等しいことに気づいていない場合は、比の値をするよう促し、生徒の目で確認させる。 |
| 展開<br>(20) | ○見通しをもつ<br>・比が等しいことを示す方法について検討する。<br><br>●自力解決<br><br>●個人探究 or グループ探究を選択し、引き続き課題解決をはかる。 | ・比が等しいことを示すためには相似な図形を見つけて相似比を考えればいい。<br>・相似な図形を見つけるために補助線をひくのがよさそうだ。<br>・補助線には「三角形を作るための線」「平行線」「垂線」「延長線」があった。<br>・面積も活用できないかな。<br>ア　点 C を通る AD の平行線をひく<br>  <br><br>AD の平行線を点 C を通るようにひき、直線 BA との交点を E とする。<br><br>イ　点 B を通る AD の平行線をひく<br>  <br> | ○補助線のひき方は図形領域で２年次から順次指導済み<br><br>○証明の書き方で困難を感じる生徒がいると考えられる。必要に応じて全体共有の時間をとり、証明の方針について確認する。<br>○生徒には自分でつくった図をロイロノートへ送り、学習シートへ貼り付けて自分の考えを記入するよう指示する。<br>○各図における証明は教材研究の項に後述。<br><br>☆学習シート【思・判・表】 |

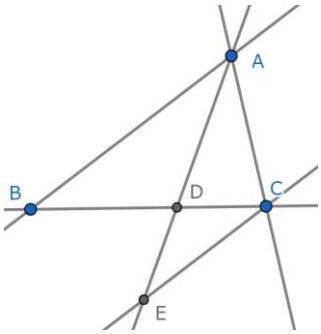
AD の平行線を点 B を通るようにひき、直線 CA との交点を E とする。

ウ　点 B を通る AC の平行線をひく



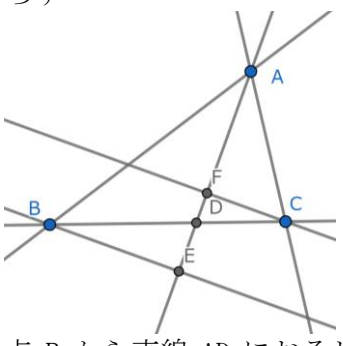

AC の平行線を点 B を通るようにひき、直線 AD との交点を E とする。

エ　点 C を通る AB の平行線をひく



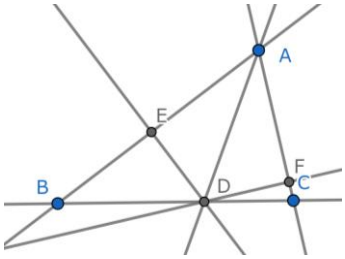

AB の平行線を点 C を通るようにひき、直線 AD との交点を E とする。

オ　点 B，C から直線 AD に垂線をおろす



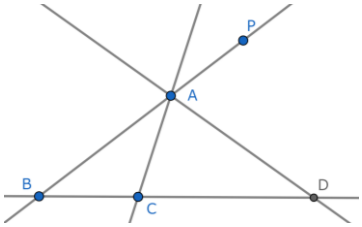

点 B から直線 AD におろした垂線を BE，点 C から直線 AD におろした垂線を CF とする。

カ　点 D から AB, AC に垂線をおろす

| | | | |
|---|---|---|---|
| | |  <br>点 D から直線 AB と直線 AC にそれぞれ垂線 DE と DF をおろす。 | |
| まとめ<br>(5) | ●学習感想を書く。 | ・ふり返りシートに本時のふり返りを記入する。 | ☆ふり返りシート【態】 |

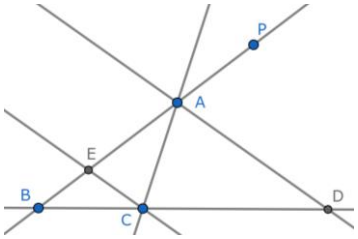
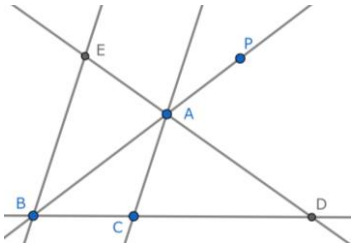
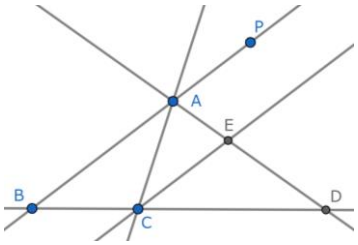
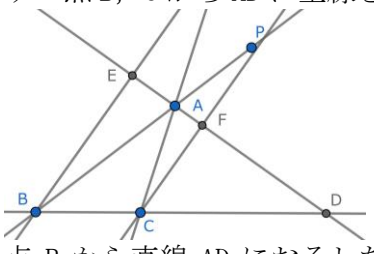
展開（２／３時）

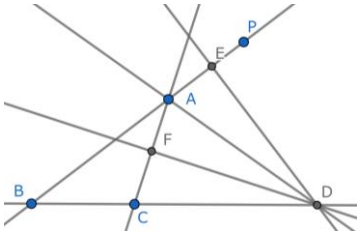
| 過程 | 指導内容及び学習活動 | ・予想される生徒の反応 | ○指導上の留意点<br>☆評価 |
|---|---|---|---|
| 展開<br>(25) | ●全体共有を行う | ・モニターを利用し、証明を発表する。<br>※○ア、カは必ず取り上げたい。<br>・発表された証明を聞き、自分でも他者へ説明してみる。 | ○本時の学びにつながる学習感想を紹介し、全体共有に入る。<br>○形式的な証明も大切であるが、発表時には見いだした性質を平行線や等しい長さ(角)を図示しながら説明できれば良い。<br>○必ず自分で口頭で他者へ証明するように指示する。 |
| まとめ<br>(5) | ・ここまでの学習内容をふり返ってまとめる。 | | |
| | ここまでの学習内容でわかったこと<br>○三角形 ABC の∠A の二等分線と BC との交点を D とすると、AB:AC=BD:DC が成り立つ<br>→相似比や面積比を用いて比が等しいことが説明できる<br>→相似な図形をみつけるのに平行線や垂線が役に立つ<br>→垂線は図形の高さになる<br>→底角が等しいことから二等辺三角形を発見できる | | |
| 導入<br>(15) | ●課題を見いだす<br>・問題の発展について話し合う。<br><br>・Geogebra を用いて角の二等分線が外角を二等分する場合について考察する。 | ・Geogebra でさらに図形を動かして考えてみよう<br>・角の二等分線をさらにかいて交点を表示させてみよう。<br>・内角だけではなく外角の二等分線を考えてみたらどうだろう。<br>【直線 AD が∠A の外角（∠PAC）の二等分線の場合】 | ○問題の発展の方向を問い、生徒に考えさせる。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  <br>△ABC において∠A の外角の二等分線と直線 BC の交点を D とすると、この図形にはどんな図形の性質があるか調べてみよう。<br>・ＡＢ：ＡＤ≠ＢＣ：ＣＤにみえる<br>・角の二等分線が BC と平行になってしまうときがあるよ。<br>・△ABC が二等辺三角形のとき角の二等分線と BC が平行になってしまう？<br>・点 D の位置が辺 BC の左右に変わるのはどんな条件が関係しているのだろう<br>・∠ABC と∠ACB の大きさの大小で点 D の位置が変わっている<br>・測定してみるとこの図でもＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣが成り立っているように見える。<br>∠ABC＜∠ACB のとき、この図形において AB:AC＝BD:DC となることを証明しよう。 | | |
| まとめ<br>(5) | ●学習感想を書く。 | ・ふり返りシートに本時のふり返りを記入する。 | ☆ふり返りシート【態】 |

展開（３／３時）

| 過程 | 指導内容及び学習活動 | ・予想される生徒の反応 | ○指導上の留意点<br>☆評価 |
|---|---|---|---|
| 展開<br>(45) | ○見通しをもつ<br>・比が等しいことを示す方法について検討する。<br><br>●自力解決 | ・前回の内角を二等分したときの考え方が使えるかも。<br>・比が等しいことを示すためには相似な図形を見つけて相似比を考えればいい。<br>・相似な図形を見つけるために補助線をひくのがよさそうだ。<br>・補助線には「三角形を作るための線」「平行線」「垂線」「延長線」があった。<br>・面積も活用できないかな。<br><br>キ　点 C を通る AD の平行線をひく | ○本時の学びにつながる学習感想を紹介し、内角の二等分線から外角の二等分線へのつながりを想起させる。<br>○証明の書き方で困難を感じる生徒がいると考えられる。必要に応じて全体共有の時間をとり、証明の方針について確認する。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ●個人探究 or グループ探究を選択し、引き続き課題解決をはかる。 |  <br>AD の平行線を点 C を通るようにひき、BA との交点を E とする。<br><br>ク　点 B を通る AD の平行線をひく<br>※∠ABC＞∠ACB の場合に成り立つ<br><br>ケ　点 B を通る AC の平行線をひく<br>  <br>AC の平行線を点 B を通るようにひき、AD との交点を E とする。<br><br>コ　点 C を通る AB の平行線をひく<br>  <br>AB の平行線を点 C を通るようにひき、AD との交点を E とする。<br><br>サ　点 B，C から AD に垂線をおろす<br>  <br>点 B から直線 AD におろした垂線を BE，点 C から直線 AD におろした垂線を CF とする。<br><br>シ　点 D から AB,AC に垂線をおろす | ○各図における証明は教材研究の項に後述。<br>☆学習シート【思・判・表】 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | |  <br>点 D から線分 AB と線分 AC にそれぞれ垂線 DE と DF をおろす。<br><br>・モニターを利用し、証明を発表する。<br>・発表された証明を聞き、自分でも他者へ説明してみる。 | ○形式的な証明も大切であるが、発表時には見いだした性質を平行線や等しい長さ(角)を図示しながら説明できれば良い。<br><br>○必ず自分で口頭で他者へ証明するように指示する。 |
| | ●全体共有を行う<br><br>・ここまでの学習内容をふり返ってまとめる。 | | |
| | ここまでの学習内容でわかったこと<br>○三角形 ABC の∠A の二等分線と線分 BC との交点を D とすると、AB:AC=BD:DC が成り立つ<br>これは内角の二等分線でも外角の二等分線でも成り立つ。<br>→相似比や面積比を用いて比が等しいことが説明できる<br>→相似な図形をみつけるのに平行線や垂線が役に立つ<br>→垂線は図形の高さになる<br>→底角が等しいことから二等辺三角形を発見できる | | |
| まとめ<br>(5) | ●学習感想を書く。 | ・ふり返りシートに本時のふり返りを記入する。 | ☆ふり返りシート<br>【態】【思・判・表】 |

（７）板書計画…後日作成

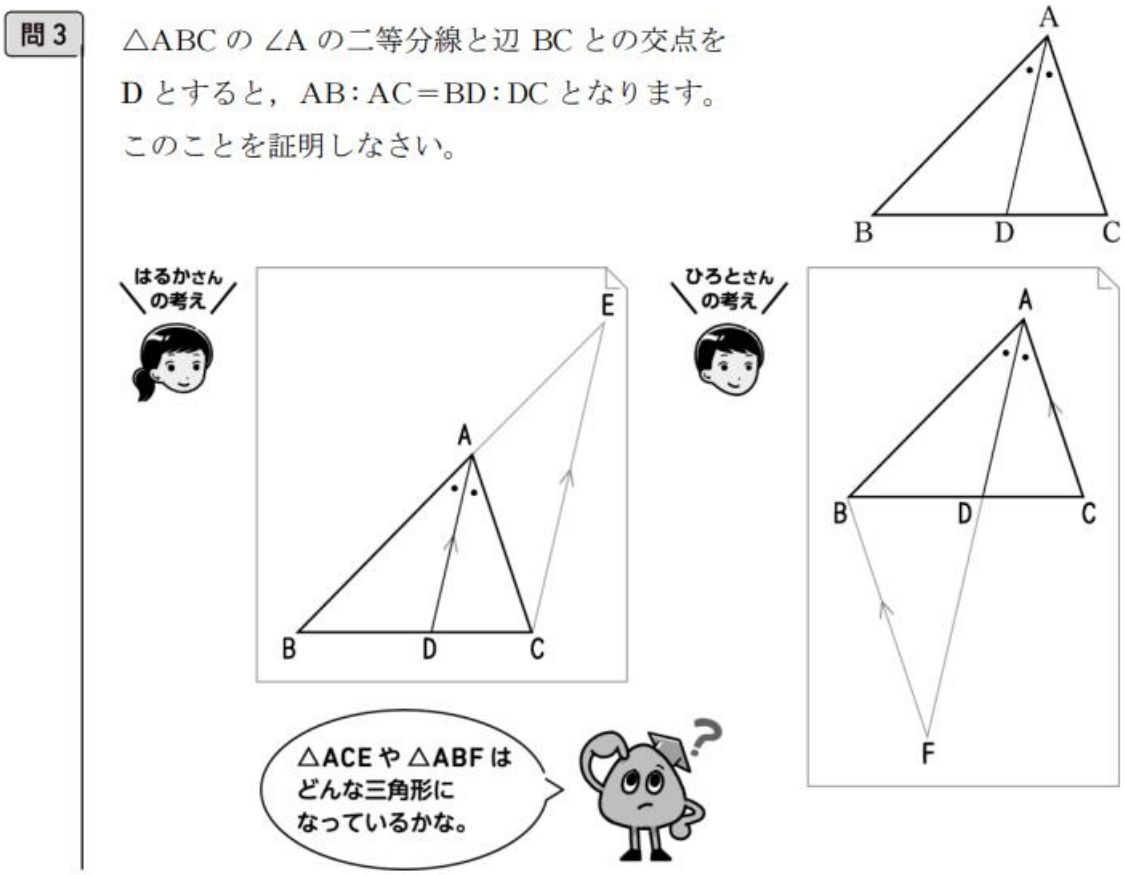
（８）評価の視点

| | A の例 | B の姿 | C の生徒への手立て |
|---|---|---|---|
| 思考・判断・表現 | ・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を発見し、複数の方法で考察することができる。 | ・三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を発見・考察することができる。 | Geogebra の測定ツールの使用や，他者との学び合いを積極的に促し，課題解決に有効な補助線のひき方について考えさせる。 |
| 主体的に学習に取り組む態度 | ・図を動かしたり補助線をひいたりしながら，三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く調べ，他者との学び合いを通して，気づいたことや修正点を記録している。<br>・問題解決の過程や結果を振り返って適切に評価し，改善しようとしている。（具体的に新たな視点などが書かれて | ・図を動かしたり補助線をひいたりしながら，三角形の内角の二等分線と辺の比の性質を粘り強く探究することができる。<br>・問題解決の過程を振り返って，自身の考えを検討しようとしている。（学習を調整しようという気持ちが書かれてい | ・机間巡視し，考えに行き詰まっているようであれば周りの生徒と情報交換をするように促す。<br>・A 評価の学習感想を次の時間の始めに示し，どのような振り返りが必要か理解する機会を設ける。 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | いる） | る） | |

（９）教材について

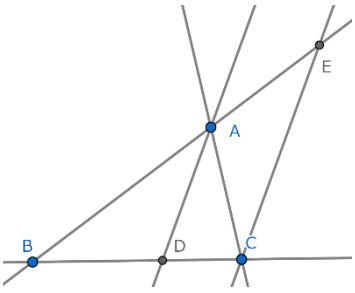
東京書籍「新編　新しい数学３」Ｐ１５３に問３として登場する。ここではすでに結論がAB:AC=BD:DCとなることが示されており、命題化されている。今回の一連の授業展開では、この結論部分を生徒が見いだし、命題化する。図形を動的に操作しながら、その図形のもつ性質を見いだすことを経験させたい。




【ADが内角の二等分線の場合】

ア　点Cを通るADの平行線をひく

ADの平行線を点Cを通るようにひき、直線BAとの交点をEとする。




仮定より∠BAD=∠CAD…①

平行線の錯角は等しいから∠CAD=∠ACE…②

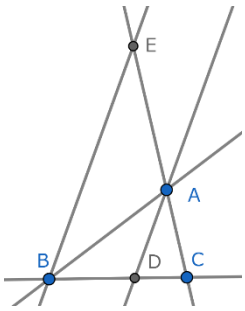
平行線の同位角は等しいから∠BAD=∠AEC…③

①②③より∠ACE=∠AEC

△ACEは２つの角が等しいので二等辺三角形だからAC=AE…④

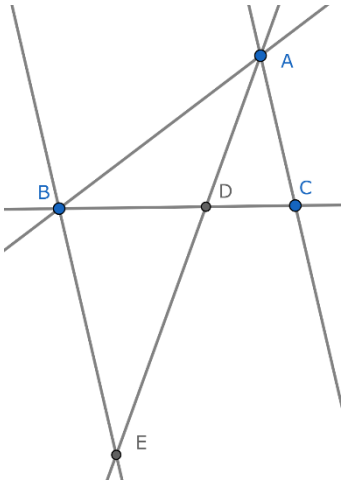
三角形と比の定理より BA:AE=BD:DC…⑤
④⑤より BA:AC=BD:DC

イ　点 B を通る AD の平行線をひく



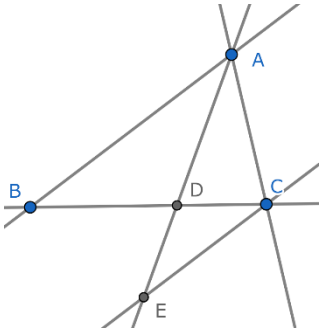

AD の平行線を点 B を通るようにひき、直線 CA との交点を E とする。
仮定より ∠BAD=∠CAD…①
平行線の錯角は等しいから ∠BAD=∠ABE…②
平行線の同位角は等しいから ∠CAD=∠AEB…③
①②③より ∠ABE=∠AEB
△ABE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから AB=AE…④
三角形と比の定理より CA:AE=CD:DB…⑤
④⑤より CA:AB=CD:DB
よって AB:AC=BD:DC

ウ　点 B を通る AC の平行線をひく



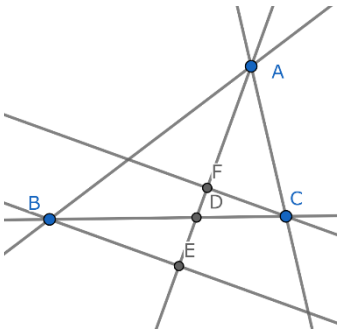

AC の平行線を点 B を通るようにひき、AD との交点を E とする。
仮定より ∠BAD=∠CAD…①
平行線の錯角は等しいから ∠CAD=∠BED…②
①②より ∠BED=∠BAD…③
△BAE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから BA=BE…④
△BED と△CAD において
対頂角は等しいから ∠BDE＝∠CDA…⑤
平行線の錯角は等しいから ∠BED＝∠CAD…⑥
⑤⑥より 2 組の角がそれぞれ等しいから△BED∽△CAD
相似な図形の対応する線分の比は等しいから BE:AC=BD:DC…⑦
③⑦より BA:AC=BD:DC

エ　点 C を通る AB の平行線をひく




AB の平行線を点 C を通るようにひき、AD との交点を E とする。
仮定より ∠BAD=∠CAD…①
平行線の錯角は等しいから ∠BAD=∠CED…②
①②より ∠CED=∠CAD…③
△CAE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから CA=CE…④
△BAD と△CED において
対頂角は等しいから ∠BDA＝∠CDE…⑤
平行線の錯角は等しいから ∠BAD＝∠CED…⑥
⑤⑥より 2 組の角がそれぞれ等しいから△BAD∽△CED
相似な図形の対応する線分の比は等しいから BA:CE=BD:DC…⑦
③⑦より BA:AC=BD:DC

オ　点 B，C から AD に垂線をおろす




点 B から直線 AD におろした垂線を BE，点 C から直線 AD におろした垂線を CF とする。

△ABE と△ACF において

仮定より∠BAE=∠CAF…①

∠BEA=∠CFA=９０°…②

①②より 2 組の角がそれぞれ等しいから△ABE∽△ACF

相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから AB:AC=BE:CF…③

△BED と△CFD において

対頂角は等しいから∠BDE＝∠CDF…④

∠BED=∠CFD=９０°…⑤

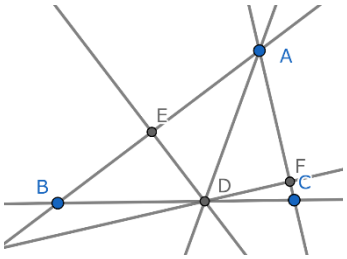
④⑤より 2 組の角がそれぞれ等しいから

△BED∽△CFD

相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから BD:DC=BE:CF…⑥

③⑥より AB:AC= BD:DC

カ　点 D から AB,AC に垂線をおろす




点 D から直線 AB と直線 AC にそれぞれ垂線 DE と DF をおろす。

△ABD と△ACD の面積比を考えると、BD と DC をそれぞれ底辺としたとき高さが等しいから

△ABD：△ACD＝BD：DC…①

また角の二等分線上の点から角の 2 辺までの距離は等しいから DE=DF…②

よって△ABD と△ACD の面積比を、AB と AC をそれぞれ底辺としたとき②から高さが等しいから

△ABD：△ACD＝AB：AC…③

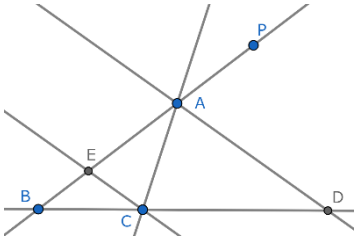
①③より AB：AC＝BD：DC

【AD が外角の二等分線の場合】

※△ABC が∠ABC=∠ACB である二等辺三角形の場合は∠A の外角の二等分線が BC と平行になってしまうため除く

※∠ABC と∠ACB の大小関係によって点 D の位置が変化する。以下の図は※∠ABC＜∠ACB の場合

キ　点 C を通る AD の平行線をひく…アと同バージョン




AD の平行線を点 C を通るようにひき、直線 BA との交点を E とする。

仮定より∠PAD=∠CAD…①

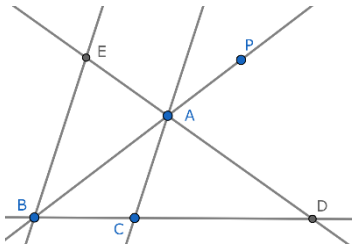
平行線の錯角は等しいから∠CAD=∠ACE…②

平行線の同位角は等しいから∠PAD=∠AEC…③

①②③より ∠ACE=∠AEC
△ACE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから AC=AE…④
三角形と比の定理より BA:AE=BD:DC…⑤
④⑤より BA:AC=BD:DC

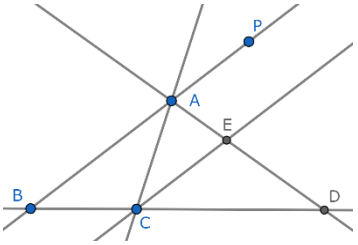
ク　点 B を通る AD の平行線をひく…イと同バージョン　※∠ABC＞∠ACB の場合に成り立つ

ケ　点 B を通る AC の平行線をひく…ウと同バージョン



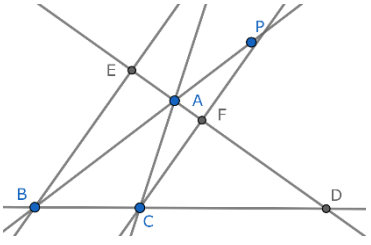

AC の平行線を点 B を通るようにひき、AD との交点を E とする。
AD は角の二等分線だから ∠PAD=∠CAD…①
対頂角は等しいから ∠PAD=∠EAB…②
平行線の同位角は等しいから ∠DAC=∠DEB…③
①②③より ∠EAB =∠AEB
△BAE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから BA=BE…④
△DCA と△DBE において
平行線の同位角は等しいから ∠DAC=∠DEB…⑤
∠D は共通の角…⑥
⑤⑥より 2 組の角がそれぞれ等しいから△DCA∽△DBE
相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから EB:AC＝BD:CD…⑦
④⑦より AB:AC＝BD:DC

コ　点 C を通る AB の平行線をひく…エと同バージョン



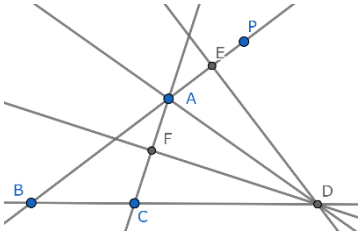

AB の平行線を点 C を通るようにひき、AD との交点を E とする。
AD は角の二等分線だから ∠PAD=∠CAD…①
平行線の錯角は等しいから ∠AEC=∠EAP…②
①②より ∠AEC =∠CAD
△CAE は２つの角が等しいので二等辺三角形だから CA=CE…③
△DCE と△DBA において
平行線の同位角は等しいから ∠DCE=∠DBA…④
∠D は共通の角…⑤
④⑤より 2 組の角がそれぞれ等しいから△DCE∽△DBA
相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから AB:EC＝BD:CD…⑥
③⑥より AB:AC＝BD:DC

サ　点 B，C から AD に垂線をおろす…オと同バージョン
点 B から直線 AD におろした垂線を BE，点 C から直線 AD におろした垂線を CF とする。
△ABE と△ACF において
仮定より ∠PAF=∠CAF…①
対頂角は等しいから ∠PAF=∠BAE…②



①②より∠BAE=∠CAF…③
∠BEA=∠CFA=９０°…④
③④より２組の角がそれぞれ等しいから△ABE∽△ACF
相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから AB:AC=BE:CF…⑤
△BED と△CFD において
∠BED=∠CFD=９０°…⑥
∠D は共通な角…⑦
⑥⑦より２組の角がそれぞれ等しいから△BED∽△CFD
相似な図形の対応する部分の長さの比は等しいから BD:DC=BE:CF…⑧
⑤⑧より AB:AC= BD:DC

シ　点 D から AB, AC に垂線をおろす…カと同バージョン　※二等分線の内外で証明に変化なし
点 D から線分 AB と線分 AC にそれぞれ垂線 DE と DF をおろす。
△ABD と△ACD の面積比を考えると、BD と DC をそれぞれ底辺としたとき高さが等しいから
△ABD：△ACD＝BD：DC…①
また角の二等分線上の点から角の ２ 辺までの距離は等しいから DE=DF…②



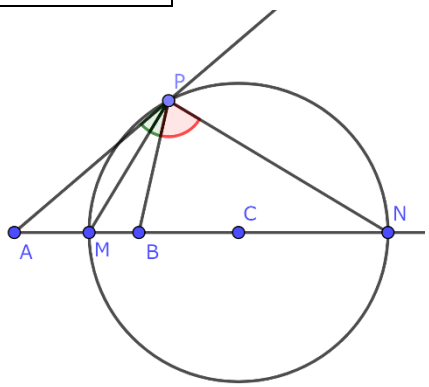

よって△ABD と△ACD の面積比を、AB と AC をそれぞれ底辺としたとき②から高さが等しいから
△ABD：△ACD＝AB：AC…③
①③より AB：AC＝BD：DC

この角の二等分線と辺の比の性質は、今回の教材において２点Ｂ，Ｃの内分点と外分点へとつながる。さらに内分点と外分点を直径とする「アポロニウスの円」へと発展していく。
【アポロニウスの円】

| ２点 Ａ，Ｂからの距離の比が ｍ:ｎ で一定である点の軌跡は円である。 |
|---|

この定理を応用すると次のような定理の証明も可能になる。

| ４点Ａ, Ｍ, Ｂ, Ｎがこの順に同一直線上にあり，ＡＭ:ＭＢ=ＡＮ:ＮＢ=ｍ:ｎを満たしている。また，線分ＰＱを直径とする円上に点Ｐを取る。<br>すると，∠ＡＰＭ=∠ＢＰＭ, １８０°－∠ＡＰＮ=∠ＢＰＮ |
|---|




このほか、チェバの定理の特殊な場合としてとらえたり、メネラウスの定理へ発展することが可能であったり高校数学への架け橋になりうる教材となっている。

引用文献


- 中学校学習指導要領(2017)
- 早川健(1997)「作図ツールソフトを活用して図形概念を豊かにする指導－「四角形の中

の四角形」の指導を中心としてー」. 第 33 回数学教育論文発表会論文集. p147-p152
・ 早川健(2001)「作図ツールソフトを活用した小学校の図形指導」. 山梨大学大学院教育学研究科修士論文
・ 「新編　新しい数学３」（２０１６）教科書，東京書籍. P153

参考文献

・ 「新編　新しい数学３」（２０１６）指導書，東京書籍
・ 「新編　新しい算数６」（２０１５）指導書，東京書籍
・ 飯島康之（2022）ICT 活用を位置づけた中学校数学の授業モデル３年，明治図書